№14 дәріс

Бағыт бойынша туынды. ФНП градиенті. Тангенс жазықтығы және бетіне қалыпты

$z=f(x;y)$ функциясы беріліп, оның f'_x және f'_y дербес туындылары табылсын.

f'_x және f'_y -тің тағы бір туындылары табылса, олар берілген функцияның екінші ретті дербес туындылары деп аталады:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x;y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x;y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

$n>2$ ретті дербес туындыларды да осыған сәйкес табуға болады.

Теорема 1. Егер $z=f(x;y)$ функциясы мен f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} анықталған және $M(x;\,y)$ нүктесінде және оның қандай да бір аймағында үзіліссіз болса, онда бұл нүктеде $f''_{xy}=f''_{yx}$.

Теорема 2. $n>2$ ретті аралас туынды үшін де сәйкес шарттар орындалса, жоғарыдағы теңдік орынды болады.

Функцияның жоғарғы ретті дифференциалдары (символдық формуласы) мына формула бойынша есептеледі:

$$d^n z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z\ .$$

Анықтама 6 . Егер $P(a,b)$ нүктесінің қандай да бір аймағындағы $P'(x,y)$ нүктелері үшін $z=f(x,y)$ функциясы $f(a,b)>f(x,y)$ ($(f(a,в)<f(x,y))$ теңсіздігі орындалса, онда $P(a,b)$ нүктесі максимум(минимум) нүктесі деп аталады. Максимум немесе минимум нүктелері функцияның экстремум нүктелері деп аталады.

Анықтама 7. Дифференциалданатын $f(x,y)$ функциясының экстремумы болатын (a,b) нүктесі кризистік нүкте деп аталады. Ол төмендегі теңдеулер жүйесін шешу жолымен табылады:

$$f'_x(a,b)=0,\ \ f'_y(a,b)=0.$$

(3)

Жалпы жағдайда, $f(x,y)$ функциясының $P(a,b)$ экстремум нүктесінде не $df(a,b)=0$, не $df(a,b)$ табылмайды.

Экстремумның жеткілікті шарты:

$P(a,b)$ - $f(x,y)$функциясының кризистік нүктесі болсын, яғни, $df(a,b)=0$. Яғни, $f'_x(a,b)=f'_y(a,b)=0$ болсын және

$$A=f''_{xx}(a,b),\ B=f''_{xy}(a,b),\ C=f''_{yy}(a,b).$$

$\Delta = AC - B^2$ дискриминантын құрайық. Онда:

1. егер $\Delta > 0$, онда функцияның $P(a,b)$ нүктесінде экстремумы бар, яғни, $A < 0$ (немесе $C < 0$) болса, максимумы, ал A>0 (немесе C>0) болса, минимумы болады;
2. егер $\Delta < 0$ болса, онда $P(a,b)$ нүктесінде экстремум жоқ;
3. егер $\Delta = 0$, онда $P(a,b)$ нүктесінің экстремум нүктесі болу, болмауы ашық сұрақ боп қалады (қосымша зерттеулер қажет).

Екі айнымалыға байланысты функциялар сияқты үш және одан да көп айнымалы функциялар үшін де экстремумға зерттеудің қажетті және жеткілікті шарттары осыған ұқсас.